

Tartu Ülikool  
Matemaatika-informaatikateaduskond  
Matemaatika instituut

Johannes Must

PINGED JA DEFORMATSIOONID PLAATIDE  
TEOORIAS

Bakalaureusetöö

matemaatika eriala (6 EAP)

Juhendaja: *prof.* Jaan Lellep

Tartu 2015

# Pinged ja deformatsioonid plaatide teoorias

Käesolevas bakalaureusetöös tutvutakse pideva keskkonna mehaanika aluste, plaatide ja koorikute põhimõistetega. Töö esimeses pooles defineeritakse pinged, siirded ja deformatsioonid koos tasakaaluvõrranditega, teises pooles uuritakse elastse tala deformeerumist ristkoormuse korral.

Märksõnad: *pingekomponent, normaalpinge, tangensiaalpinge, lineaardeformatsioon, siire, nurkdeformatsioon, õhuke plaat, üldistatud pinged, membraanjõud, paindemoment, tala, plaat*

# Stresses and deformations in plate theory

This bachelor's thesis introduces the reader to the basics of continuum mechanics and the principle terminology of plates and shells. In the first half of the thesis we define stress, displacement and deformation with equilibrium equations and in the second half we examine deformation of elastic beam subjected to transverse loads.

Keywords: *stress component, normal stress, shear stress, linear deformation, angular deformation, displacement, thin plate, generalized stress, membrane force, bending moment, beam, plate*

# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b>	<b>4</b>
<b>1. Mõisted ja terminoloogia</b>	<b>5</b>
1.1 Pinge mõiste . . . . .	5
1.2 Pinged kaldpinnal . . . . .	6
1.3 Staatika - jõudude tasakaal . . . . .	9
1.4 Tasakaaluvõrrandid . . . . .	10
1.5 Siirded ja deformatsioonid . . . . .	13
<b>2. Tala paine</b>	<b>17</b>
2.1 Õhuke plaat ja Kirchhoffi hüpoteesid . . . . .	17
2.2 Deformatsioonid plaadis . . . . .	18
2.3 Üldistatud pinged . . . . .	18
2.4 Hooke'i seadus . . . . .	19
2.5 Tala tasakaaluvõrrandid . . . . .	20
2.6 Rajatingimused . . . . .	22
2.7 Pingete ja momentide jaotused . . . . .	23
2.8 Läbipainded . . . . .	25
2.9 Astmelise ristlõikega konsooltala . . . . .	30
2.10 Tükiti konstantse paksusega tala; ühtlane ristkoormus . . . . .	32
2.11 Tala optimeerimine . . . . .	34
<b>Kasutatud kirjandus</b>	<b>37</b>

# Sissejuhatus

Õhukeseseinalised talad, plaadid ja koorikud on väga olulised konstruktsioonielemendid. Lennunduse ja kosmonautika areng on tänu võlgu just komposiitmaterjalidest valmistatud õhukeste koorikute kasutamisele. Nendel elementidel on suur tugevus ja jäikus võrreldes sama kaaluga homogeensete konstruktsiooni elementidega.

Antud töös tutvutakse pideva keskkonna mehaanika aluste ja plaatide ning koorikute põhimõistetega.

Töö esimeses peatükis on defineeritud pingete, siirete ja deformatsioonide mõisted. Siin on esitatud ka tasakaaluvõrrandid. Need on diferentsiaalvõrrandid, mida peavad rahuldama pingekomponendid vaadeldava keha igas punktis.

Teises peatükis uuritakse elastse tala deformeerumist ristkoormuse korral. Talade deformeerumist uuritakse erinevate kinnitusviiside korral. Vaatluse alla võetakse ka veel mittekonstantse ristlõikega vabalt toetatud tala. Töö lõppeb optimeerimisülesandega mittekonstantse ristlõikega konsooltala korral.

# I Mõisted ja terminoloogia

Selles peatükis defineerime kõik töös kasutatavad olulisemad mõisted, mis on seotud ta-  
lade, plaatide ja koorikute deformeerumisega.

Pinge mõju tagajärjel iga keha deformeerub. Elastne keha on defineeritud kui keha, mis  
taastab oma kuju peale pinge eemaldamist. Seevastu plastsest materjalist keha ei taasta  
oma kuju peale pinge eemaldamist.

## 1.1 Pinge mõiste

**Definitsioon 1.1.** Kui osake liigub deformatsiooni käigus punktist  $P_0$  punkti  $P_1$  siis  
vektorit  $\overrightarrow{P_0P_1}$  nimetatakse siirdeks.

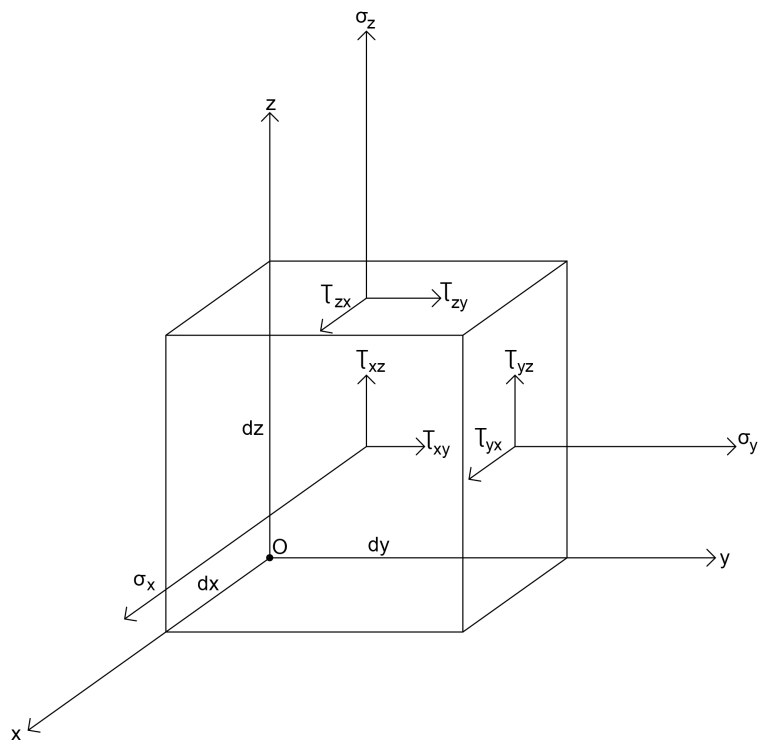
Välisjõududeks nimetatakse jõude, mis mõjutavad kas keha igat punkti või tema välis-  
pinda. Näiteks raskusjõud mõjub igale keha punktile, pindjõud aga keha pinnal. Välisjõud  
vastandub sisejõule Newtoni 3. seaduse alusel, mis ütleb, et sisejõud tekivad kehas vastan-  
damaks kehale mõjuvaid välisjõude.

**Definitsioon 1.2.** Pingevektoriks tasapinnal, mille normaalvektor on  $\nu$ , nimetatakse  
piirväärtust

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_\nu}{\Delta S} = \vec{p}_\nu, \quad (1.1)$$

kus  $\vec{P}_\nu$  on sellel tasandil mõjuv jõuvektor,  $S$  on pinnatüki pindala ning  $\vec{p}_\nu$  on antud  
punkti pingevektor.

Uurime pingevektoreid lõpmatult väikese risttahuka tahkudel (vt joonist 1). Märgime ära,  
et vastastahule mõjuvad sama suurusega aga vastandmärgilised jõud.



Joonis 1: Risttahukale mõjuvad pingekomponendid

**Definitsioon 1.3.** Tahuga ristsuunalist pingvektorit  $\sigma$  nimetatakse normaalspingeks.

Pingvektori indeks näitab, mis tahul ja mis suunaline on normaalspinge. Näiteks kui meil on normaalspinge  $\sigma_x$ , siis on ta  $x$ -telje suunaline normaalspinge.

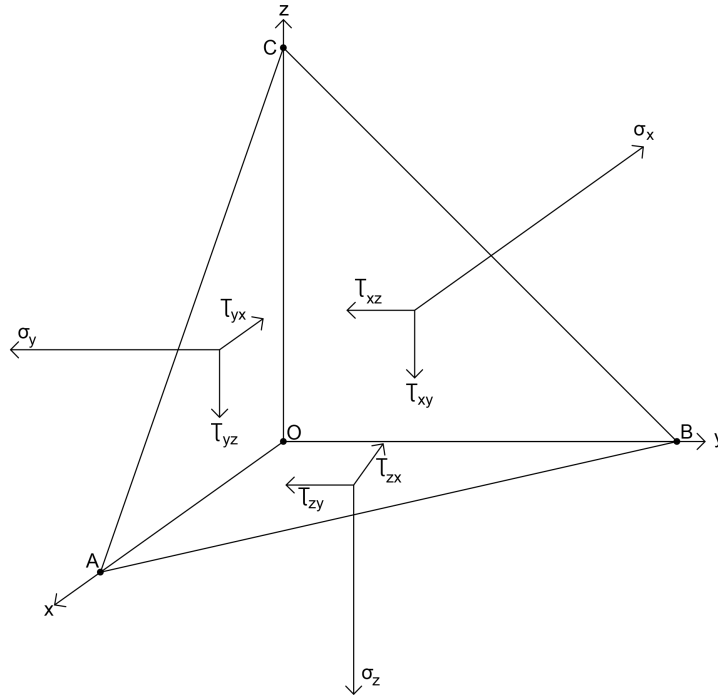
**Definitsioon 1.4.** Koordinaattahul asetsevat, normaalspingega risti olevat pingvektorit  $\tau$  nimetatakse tangentsiaalpingeks.

Sarnaselt normaalspingega näitab tangentsiaalpinge indeks tema asukohta ja suunda: esimene indeks näitab, millise normaalkvektoriga on tangentsiaalpinge risti, ja teine indeks, mis suunaline ta on antud tahul. Näiteks, kui meil on tangentsiaalpinge  $\tau_{xy}$ , siis on ta risti normaalspingega  $\sigma_x$  ja  $y$ -telje suunaline.

## 1.2 Pinged kaldpinnal

Olgu antud lõpmatult väikeste mõõtmetega tetraeder, mis on määratud nelja punkti poolt: telgede alguspunkt  $O$ ,  $x$ -teljel asuv punkt  $A$ ,  $y$ -teljel asuv punkt  $B$  ja  $z$ -teljel asuv

punkt  $C$  (vt joonist 2). Kuna meil on tegu lõpmatult väikeste mõõtmetega objektiga, siis ka lõikude  $OA$ ,  $OB$  ja  $OC$  pikkused on lõpmata väikesed, tähistame need pikkused vastavalt  $dx$ ,  $dy$  ja  $dz$ .



Joonis 2: Pinged kaldpinnal

Kaldpindsele objektile mõjuvad välisjõud on jõuvektor

$$\vec{P}_\nu = (P_x, P_y, P_z) \quad (1.2)$$

ja massijõud

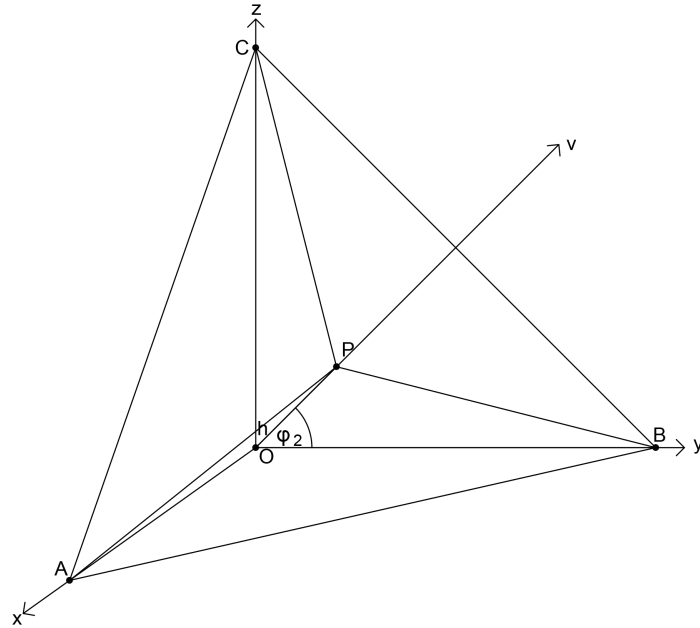
$$\vec{F} = (X, Y, Z), \quad (1.3)$$

Igale tahule mõjuvad ka sisejõud, mis koosnevad normaalpingevektorist  $\sigma$ , mis on risti tahuga, ja kahest tangentsiaalpingevektorist  $\tau$ , mis on suunatud mööda oma tahku (vt joonist 2).

Defineerime ühikvektori, mis ristub kaldpinnaga punktis  $P$ :

$$\vec{\nu} = (l, m, n). \quad (1.4)$$

Kuna tegemist on ühikvektoriga, siis  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ . Nurgad ühikvektori ja telgede vahel tähistame vastavalt  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  ja  $\varphi_3$ .



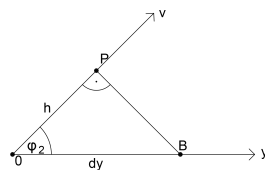
Joonis 3: Kaldpinna  $ABC$  normaal

Tähistame kõrguse  $OP = h$  (vt joonist 3). Projekteerides kõrguse  $h$   $x$ -teljele saame, et

$$h = dx \cos \varphi_1. \quad (1.5)$$

Tähistame leitud projektsiooni  $ldx$ . Analoogselt projekteerime kõrguse  $h$  teljele  $y$  (vt joonist 4). Siit tuleneb, et

$$h = dy \cos \varphi_2. \quad (1.6)$$



Joonis 4: Kõrguse  $h$  projektsioon  $y$ -teljele



Seda projektsiooni tähistame  $mdy$ . Veel kord kasutame eelnevat meetodit, et projekteerida  $h$  teljele  $z$ . Nii saame võrduse

$$h = dz \cos \varphi_3. \quad (1.7)$$

Siin tähistame projektsiooni  $z$ -teljele kui  $ndz$ . Kasutame leitud projektsioone ja uuritava objekti ruumala

$$dV = \frac{1}{3}hS_{ABC}, \quad (1.8)$$

et leida, kuidas kaldpinnale  $ABC$  mõjuvad sisejõud. Projekteerime tahud, mis on risti telgedega, kaldtahule, kasutades ruumala valemit (1.8). Projekteerides tahu, mis toetub  $x$ -teljele, kasutades seost (1.5), saame, et

$$dV = \frac{h}{3}dF = ldx. \quad (1.9)$$

Projekteerime tahu, mis toetub  $y$ -teljele, kaldpinnale  $ABC$ . Kui kasutada seost (1.6), siis saame tulemuseks, et

$$dV = \frac{h}{3}dF = mdy. \quad (1.10)$$

Analoogiliselt saame, et

$$dV = \frac{h}{3}dF = ndz. \quad (1.11)$$

### 1.3 Staatika - jõudude tasakaal

Olgu meil jõudude süsteem  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ . Mehaanikast on teada, et jõudude süsteemi tasakaalu korral  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$ . Valemist (1.3) järeldeb, et (vt [4])

$$\sum_{i=1}^n \vec{X}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \vec{Y}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \vec{Z}_i = 0. \quad (1.12)$$

Uurime tasakaalu  $x$ -teljel. Jõuvektori  $\vec{P}_\nu$  projektsioon  $x$ -teljele on  $p_x$ . Kuna tangentsiaalpinged  $\tau_{xy}$  ja  $\tau_{xz}$  on risti  $x$ -teljega siis nende projektsioonid on võrdsed nulliga. Seega

saame valemi (1.12) põhjal välja kirjutada järgmise võrduse:

$$p_x \cdot dF - \sigma_x \cdot S_{OBC} - \tau_{yx} \cdot S_{OAC} - \tau_{zx} \cdot S_{OAB} + XdV = 0. \quad (1.13)$$

Kuna tasakaal peab kehtima ka siis, kui mõõtmed lähenevad nullile ehk  $dx \rightarrow 0$ , siis saame, et

$$p_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n. \quad (1.14)$$

Analoogselt  $x$ -teljega saame leida ka jõuvektorite projektsioonid  $y$ - ja  $z$ -teljel. Seega jõuvektorite projektsioonid on järgmised:

$$\begin{cases} p_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n, \\ p_y = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n, \\ p_z = \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{cases} \quad (1.15)$$

## 1.4 Tasakaaluvõrrandid

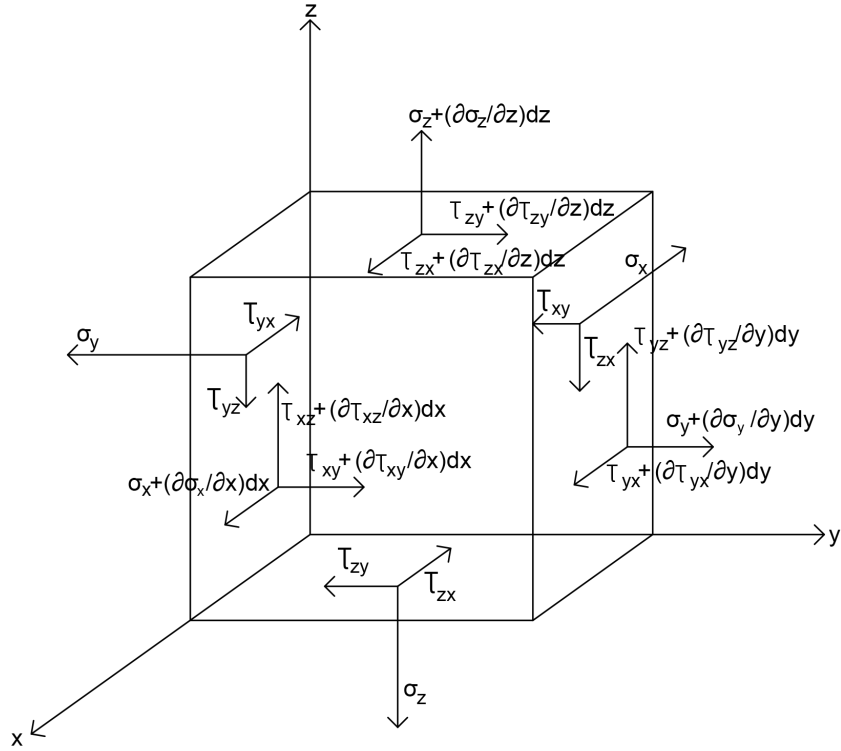
Kehale mõjuvate välisjõudude tulemusena toimuvad kehas deformatsioonid. Pingete projektsioonid telgedel on välja toodud tabelis 1:

	$x$ -telje suunalisel tahul	$y$ -telje suunalisel tahul	$z$ -telje suunalisel tahul
$x$ -telje sihis	$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$	$\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$	$\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$
$y$ -telje sihis	$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$	$\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$	$\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz$
$z$ -telje sihis	$\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx$	$\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy$	$\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$

Tabel 1: Pingekomponendid vastavalt tahule ja suunale

Tabelis 1 märgitud pingevektoritele on juurde liidetud juurdekasv vastava telje suunas. Juurdekasvud on graafiliselt kujutatud joonisel 5.

Juurdekasvu arvestame juurde ainult tahkudel, mis asuvad telje positiivses suunas. Seega vastastahkudel on pingevektor vastassuunaline ja juurdekasvuta. Kuna kõik kehale mõjuvad jõud on tasakaalus, siis saame leida tahkude kaupa nende mõjuvad jõud. Uuri-



Joonis 5: Pingekomponendid risttahuka tahkudel

me pingeseisundit  $x$ -teljega ristuvale tahul, kus  $dydz$ ,  $dx dz$  ja  $dx dy$  on vastavalt  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -telgedega ristuvate tahkude pindalad. Projekteerides kõik sisejõud  $x$ -teljele saame, et

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x + \sigma'_x dx) dy dz - \sigma_x dy dz + (\tau_{yx} + \tau'_{yx} dy) dx dz - \tau_{yx} dx dz \\
 + (\tau_{zx} + \tau'_{zx} dz) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dV = 0.
 \end{aligned}
 \tag{1.16}$$

Toimides analoogselt ka teiste tahkudega saame võrrandid, mida nimetatakse tasakaaluvõrranditeks:

$$\begin{cases}
 \sigma'_x + \tau'_{yx} + \tau'_{zx} + X = 0, \\
 \tau'_{xy} + \sigma'_y + \tau'_{zy} + Y = 0, \\
 \tau'_{xz} + \tau'_{yz} + \sigma'_z + Z = 0.
 \end{cases}
 \tag{1.17}$$

## Momendid

Vaatleme pingete poolt tekitatud momente.

**Definitsioon 1.5.** Jõu  $\vec{F}$  poolt tekitatud momendiks punkti  $O$  suhtes nimetatakse vektorit

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (1.18)$$

kus  $\vec{r}$  on jõu rakenduspunkti kohavektor.

Momendi telje suhtes saame, kui projekteerime jõuvektori tasandile, mis on risti teljega, ja korrutame seda jõuõlaga, mis on risti nii jõuvektori projektsiooniga kui ka teljega. See tähendab, et kui jõuvektori projektsioon tasandil  $\pi$  on  $\vec{F}_\pi$  ning jõuõlg  $h$ , siis moment  $M_l = \pm F_\pi \cdot h$ , kus momendi märk valitakse sõltuvalt sellest, kas moment tekitab pöörde vastu- või päripäeva. Lepime kokku, et vastupäevase liikumise korral on märk positiivne ja päripäeva puhul negatiivne.

Momentide summa  $x$ -telje suhtes tuleb:

$$\begin{aligned} & -(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx) dy dz \frac{dz}{2} + \tau_{xy} dy dz \frac{dz}{2} + (\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx) dy dz \frac{dy}{2} - \tau_{xz} dy dz \frac{dy}{2} \\ & + (\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy) dx dz dy - \tau_{yz} dx dy dy - (\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz) dx dy dz + \tau_{zy} dx dy dz \\ & - (\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy) dx dz \frac{dz}{2} + \sigma_y dx dz \frac{dz}{2} - (\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz) dx dy \frac{dy}{2} - \sigma_z dx dy \frac{dy}{2} \\ & + F dV \cdot h_F = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Teame eelnevalt, et  $dV = dx dy dz$  ning, et  $\tau_{yz} dy^2 dz = 0$  ja  $\tau_{zy} dx^2 dy = 0$ , mis tuleneb sellest, et nende vastastahud on risti  $x$ -teljega. Seega on nende jõuõlad risti. Kuna tasakaal peab säilima, kui mõõtmed lähenevad nullile, siis sellest järeldub, et kui  $\frac{dx}{2} \rightarrow 0$  ja  $\frac{dz}{2} \rightarrow 0$ , siis ka  $F dV h_F \rightarrow 0$ , mis annab meile võrduse

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (1.20)$$

Võrdsustades nulliga momentide summa  $y$ - ja  $z$ -telje suhtes näeme, et  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$  ja  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ .

## 1.5 Siirded ja deformatsioonid

**Definitsioon 1.6.** Siirdevektoriks nimetatakse vektorit  $(u, v, w)$ , mis kirjeldab mingi massi osakese liikumist punktist  $A$  punkti  $A_1$ . Siin  $x$ -telje suunalist liikumist väljendab suurus  $u$ ,  $y$ -teljele vastab suurus  $v$  ja  $z$ -teljele  $w$ .

### Deformatsioonid

Selles alapeatükis toome sisse kaks erinevat deformatsiooni vormi.

#### 1. Lineaarsed deformatsioonid

Lineaarseks deformatsiooniks nimetatakse ühe dimensioonilise keha, näiteks varda, pikenemist, kus meil on teada varda pikkus  $l_0$  enne deformatsiooni ja pärast deformatsiooni  $l = l_0 + \Delta l$ . Varda suhteliseks pikenemiseks nimetatakse jagatist  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$  (vt [1]).

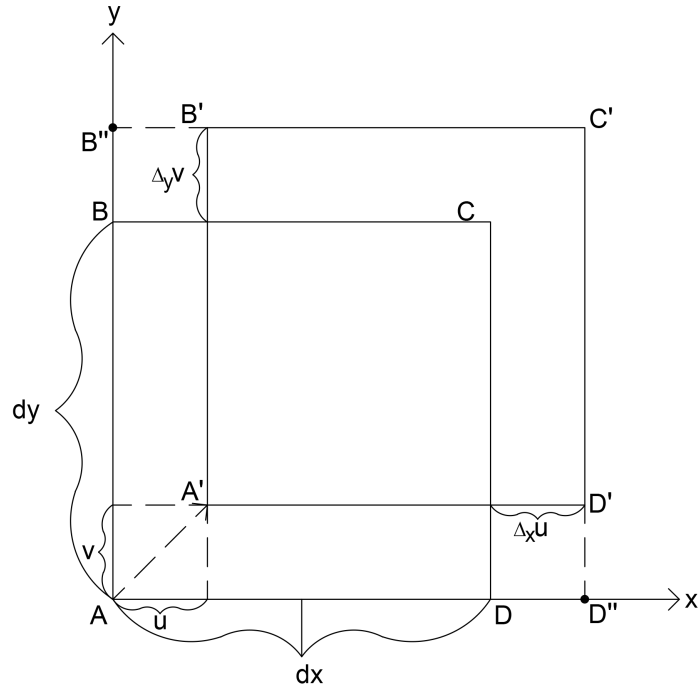
#### 2. Nurkdeformatsioonid

Nurkdeformatsiooniks nimetatakse täisnurkse elemendi nurga muutust deformatsiooni käigus.

Uurime mõlemaid deformatsiooni vorme:

1. Olgu meil element  $xy$ -tasandil, millel toimub lineaarne deformatsioon. Tasandi algpositsioon on  $ABCD$  ja pärast deformatsiooni on  $A'B'C'D'$  (vt joonist 6). Kirjeldame punkti  $D'$  siiret: olgu punkt  $D''$ , mis väljendab siirde  $DD'$   $x$ -telje sihelist liikumist. Seega  $DD'' = u + \frac{\partial u}{\partial x}dx$ , kus võime juurdekasvu edaspidiselt märkida  $\frac{\partial u}{\partial x}dx = \Delta_x u$ . Siirdel  $DD'$  toimuv  $y$ -telje sihiline liikumine väljendub läbi pikkuse  $v$ . Analoogia põhjal saame arvutada ülejäänud nelinurga tippude koordinaadid. Need on

$$\begin{aligned} A'(u, v), \\ B'(u, v + \frac{\partial v}{\partial y}dy), \\ C'(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx, v + \frac{\partial v}{\partial y}dy), \\ D'(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx, v). \end{aligned} \tag{1.21}$$



Joonis 6: Lineaarne deformatsioon

Elemendi suhtelist pikenemist väljendavad deformatsiooni lineaarsed komponendid  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  ja  $\varepsilon_z$ . Näiteks  $x$ -teljega paralleelse elemendi algne pikkus on  $AD = dx$  ja pikenemise saame kirjutada kujul

$$A'D' - AD = u + \frac{\partial u}{\partial x}dx - u. \quad (1.22)$$

Seega

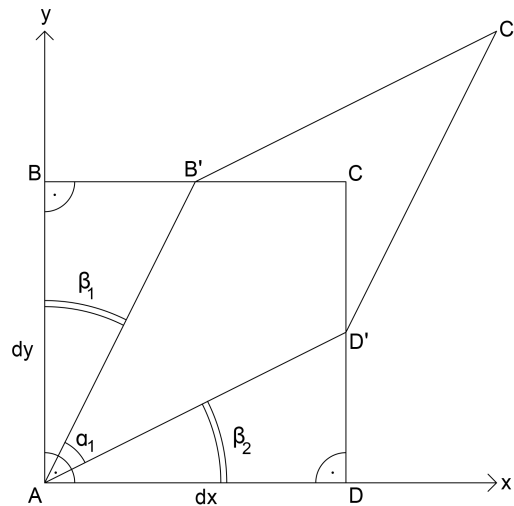
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.23)$$

Analoogselt saame leida kõik ülejäänud lineaarsed komponendid (vt [2], [5] ja [6]):

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \end{cases} \quad (1.24)$$

2. Olgu meil  $xy$ -tasapinnal nelinurk  $ABCD$ , millele kuju peale deformatsiooni on  $AB'C'D'$  (vt joonist 7).

**Definitsioon 1.7.** Olgu  $x$ - ja  $y$ -teljega paraleelsed lõigud. Nurkdeformatsiooniks  $\gamma_{xy}$  nimetatakse vastavate lõikude vahelise nurga muutust.



Joonis 7: Nurkdeformatsioon

Joonise 7 põhjal võime kirjutada, et

$$\tan \beta_1 = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.25)$$

Väikeste nurkade korral on nurk ja tema tangens ligikaudu võrdsed. Seega saame punkti  $B'$  koordinaatideks

$$B'(\frac{\partial u}{\partial y} dy, dy). \quad (1.26)$$

Analoogselt saame välja kirjutada, et

$$\beta_2 = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1.27)$$

millest tuleneb, et punkti  $D'$  koordinaadid on

$$D'(dx, \frac{\partial v}{\partial x} dx). \quad (1.28)$$

Seega saame, et nurkdeformatsioon  $\gamma_{xy}$  avaldub kujul

$$\gamma_{xy} = \beta_1 + \beta_2. \quad (1.29)$$

Toimides analoogselt eelnevale lahenduskäigule leiame nurkdeformatsioonid teistel koordinaattasanditel (vt [5] ja [6]):

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{cases} \quad (1.30)$$

Valemeid (1.24) ja (1.30) nimetatakse Cauchy valemiteks.



## II Tala paine

### 2.1 Õhuke plaat ja Kirchhoffi hüpoteesid

Viimase poolesaja aasta jooksul on lennunduses, kosmonautikas ja mujalgi väga laialdaselt kasutatud õhukeseseinalisi konstruktsioonelemente – plaate ja koorikuid. Gustav Kirchhoff (1824-1884) oli saksa füüsik, kelle hüpoteeside tulemusena on võimalik vaadelda kolmedimensioonilist plaati kahedimensioonilisena.

Õhukeseseinaliseks plaadiks nimetatakse püstsilindrilist keha, mille kõrgus on väike võrreldes teiste mõõtmetega. Üldreeglina on kõrgus sama keha igas punktis. Talade, plaatide ja koorikute pinge-deformatsiooniseisundi määramisel on olulisel kohal Kirchhoffi hüpoteesid.

Siin kohal toome need hüpoteesid välja (vt [2], [5]-[8]):

1. Iga plaadi element, mis on risti keskpinnaga enne deformatsiooni, jääb risti keskpinnaga ka peale deformatsiooni. Keskpinnaks nimetatakse pinda, mis asub võrdsel kõrgusel plaadi otspindadest ning on alati tasapind. Seda hüpoteesi nimetatakse ka sirgete normaalide hüpoteesiks.
2. Plaadi kesktasand ei veni välja ega tõmbu kokku, mis tähendab, et toimub ainult paine ehk puhas paine. Seega siirded  $u|_{Z=0} = 0$  ja  $v|_{Z=0} = 0$ .
3. Plaadi üksikute kihtide vahel puudub surve või tõmme, plaadi kihid ei lähene üksteisele ega kaugene üksteisest. Seega komponent  $\varepsilon_z = 0$ .

## 2.2 Deformatsioonid plaadis

Eelnevas nägime, et lineaarsed deformatsiooni komponendid on omavahel seotud võrduse (1.24) järgi. Nurkdeformatsioonid on esitatavad kujul

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Kasutades Kirchhoffi hüpoteese ja Cauchy valemeid (1.24) ning (1.30), saame plaatide korral

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Näeme, et kõik deformatsiooni komponendid avalduvad siirde  $w$  kaudu ehk läbipainde kaudu.

## 2.3 Üldistatud pinged

Olgu meil plaadi paksus ehk täiskõrgus  $h$ . Toome sisse ka membraanjõud, mida defineerime järgmiselt (vt [5] ja [6]):

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz,\tag{2.3}$$

$$N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz.\tag{2.4}$$

Sarnaselt defineerime ka momendid (vt [5] ja [6]):

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \\ M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \end{aligned} \tag{2.5}$$

ning  $M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz$ . Momente ja membraanjõude nimetatakse üldistatud pingeteks.

## 2.4 Hooke'i seadus

Iga lõpmata õhukese tala kihi jaoks saab rakendada Hooke'i seadust võttes nüüd arvesse elemendi laiuse  $b$ . Ühe kihi korral (vt [5]-[7])

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x, \tag{2.6}$$

kus  $E$  on Young'i moodul, mis näitab materjali elastsust (mida väiksem elastsus, seda suurem on  $E$  väärtus).

Üldistatud Hooke'i seadusest lähtuvalt, kus  $N_x = N$ , saame, et

$$N = -E \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z dz. \tag{2.7}$$

Võtame kasutusse tala telje kõveruse  $\varkappa$ , mis avaldub kujul

$$\varkappa = -w''. \tag{2.8}$$

Peale valemi (2.7) integreerimist saame, et

$$N = 0. \tag{2.9}$$

Analoogiliselt saame momendile valemi:

$$M = \frac{-Eb\kappa h^3}{12}. \quad (2.10)$$

Võtame kasutusse tala ristlõike inertsimomendi  $I$ , mis on defineeritud valemiga

$$I = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.11)$$

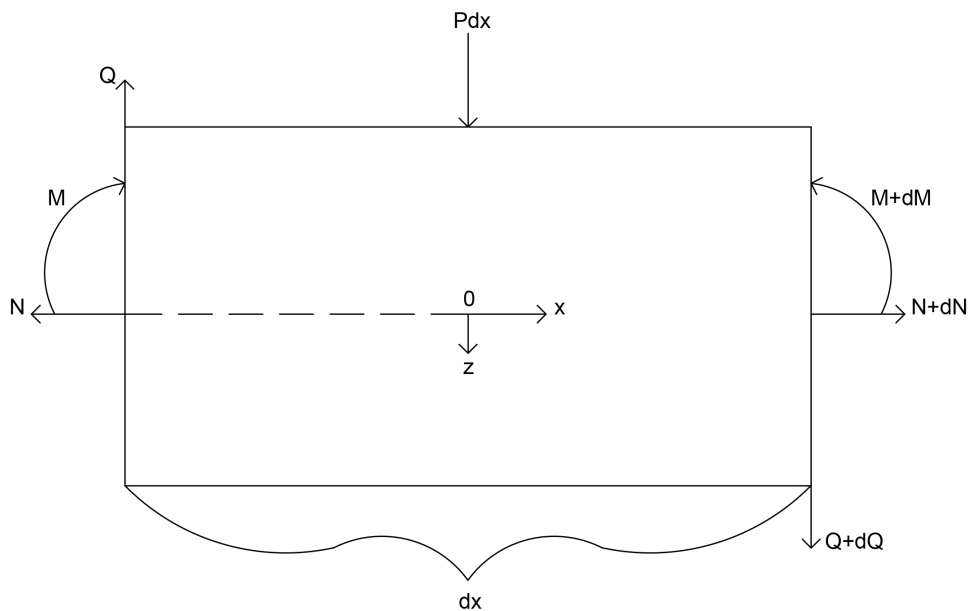
Üldistatud Hooke'i seadus näeb välja järgmiselt:

$$\begin{cases} N = 0, \\ M = -E \cdot I \cdot \kappa. \end{cases} \quad (2.12)$$

## 2.5 Tala tasakaaluvõrrandid

Selles alapeatükis tuletame talale tasakaaluvõrrandid. Üldistatud jõudude süsteemi kuuluvad järgmised suurused: moment ehk paindemoment  $M_x$ , membraanjõud  $N_x$ , lõikejõud  $Q$  ja välisjõud  $p$  (jaotatud koormuse intensiivsus). Üldistatud jõudude süsteem peab olema tasakaalus. Igal jõul on juurdekasv ning vastassuunaline ja piirulukorras võrdne jõud. Kõik erinevad kihid, mis on paralleelsed piirkihiga, painduvad temaga analoogselt. Olgu  $x$ -telg tala telje suunaline. Kuna laius  $b$  taandub lõppkokkuvõttes võrrandidest välja, vaatleme laiust  $b$  ühiksuurusena. Kõik jõud mõjuvad ühel tasandil. Joonisel 8 on välja toodud element üldistatud jõudude süsteemiga. Tasapinnaliste jõudude süsteem lubab meil vaadelda tasakaalu natukene teisiti võrreldes ruumiliste jõudude süsteemiga. Tasapinnaline jõudude süsteem on tasakaalus, kui on täidetud järgmised tingimused:

$$\begin{aligned} \sum_i X_i &= 0, \\ \sum_i Z_i &= 0, \\ \sum_i M_i &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$



Joonis 8: Tala element

Jõudude projektsioonide summa  $x$ -telje sihis annab

$$-N + N + dN = 0. \quad (2.14)$$

Vertikaalsihis mõjub talale lõikejõud ja jaotatud ristkoormus. Seetõttu

$$-Q + Q + dQ + p dx = 0. \quad (2.15)$$

Paindemomendi leidmiseks võtame teadmiseks, et lõikejõu õla pikkus on  $\frac{dx}{2}$ , mistõttu

$$-M + M + dM - Q \cdot \frac{dx}{2} - (Q + Q' dx) \cdot \frac{dx}{2} = 0. \quad (2.16)$$

Kuna piirolukorras  $dx \rightarrow 0$ , siis

$$M' - \frac{Q}{2} - \frac{Q}{2} = 0. \quad (2.17)$$

Võrduste (2.14), (2.15) ja (2.17) põhjal saame, et

$$\begin{aligned} N' &= 0, \\ Q' &= -p, \\ M' &= -Q. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Tulemusest (2.18) järeldub, et

$$M'' = -p. \tag{2.19}$$

## 2.6 Rajatingimused

Vaatame tala erinevaid kinnitusviise. Lepime kokku, et kui ei ole öeldud teisiti, siis koordinaatide alguspunkt on vasakpoolses kinnituskohas. Seejuures  $x$ -telg on tala keskjoonel ja  $z$ -telg on suunaga alla ja risti  $x$ -teljega. Uurime kolme erinevat tala kinnitusviisi: vabalt toetatud tala; jäigalt kinnitatud tala; konsooltala.

### Vabalt toetatud tala

Vaba toetus takistab vertikaalset liikumist, aga ei takista paindumist (vt joonist 9).

Sisejõudude moment on tala otstes null ehk  $M(0) = 0$  ja  $M(l) = 0$ .

Läbipaine ehk  $z$ -telje sihiline siire on ka null ehk  $w(0) = 0$  ja  $w(l) = 0$ .

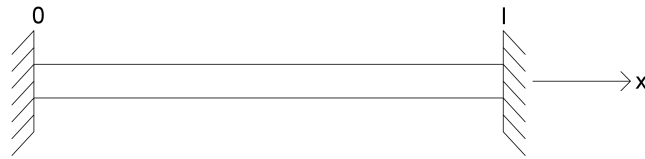
Vaba toetuse korral on tala keskel löikejõud null ehk kui tala pikkus on  $l$ , siis  $Q(\frac{l}{2}) = 0$ .



Joonis 9: Vabalt toetatud tala

### Jäigalt toetatud tala

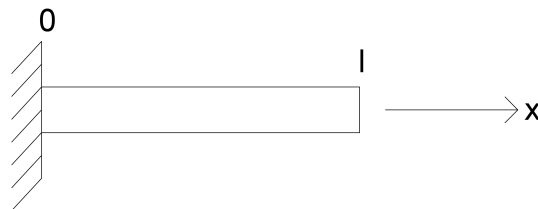
Mõlemast otsast jäigalt kinnitatud tala korral on  $z$ -telje sihiline siire taas null ehk  $w(0) = 0$  ja  $w(l) = 0$  (vt joonist 10).



Joonis 10: Jäigalt kinnitatud tala

### Konsooltala

Nüüd on takistatud vertikaalne liikumine ainult ühes otsas ehk  $w(0) = 0$ ,  $M(l) = 0$  ja  $Q(l) = 0$  (vt joonist 11).

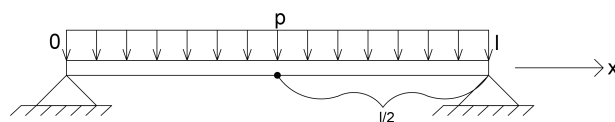


Joonis 11: Konsooltala

## 2.7 Pingete ja momentide jaotused

Uurime, kuidas käituvad sisejõud talades eelmises alapeatükis tutvustatud kinnitusviiside korral. Olgu talale rakendatud ühtlane ristkoormus, mis on konstantne keha igas punktis.

### Vabalt toetatud tala



Joonis 12: Vabalt toetatud tala ühtlaselt jaotatud koormuse all

Kasutame võrrandeid (2.18), mille põhjal

$$\begin{aligned} Q &= -p \cdot x + C_1, \\ M &= -\frac{px^2}{2} + C_1x + C_2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Võttes arvesse kinnitusviisi omadusi  $M(0) = 0$ ,  $M(l) = 0$  ja  $Q(0) = 0$ , saame konstantideks

$$\begin{aligned} C_2 &= 0, \\ C_1 &= \frac{pl}{2}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Varem leitud tulemuste (2.21) ja (2.20) ning kinnitusviisi omaduste põhjal saame leida momendi  $M$  järgmisel viisil:

$$M = \frac{px}{2}(x - l)^2. \tag{2.22}$$

Leiame momendi  $M$ , kui koordinaatide alguspunkt asub tala keskel. Antud juhul me teame, et löikejõud on tala keskpunktis null ehk  $Q(0) = 0$ . Seega saame, et

$$Q = -px + B_1. \tag{2.23}$$

Kasutame teadmist, et löikejõud tala keskpunktis on null, millest tulenevalt saame, et  $B_1 = 0$ . Kasutades jälle tulemust (2.18) jõuame valemieni

$$M = -\frac{p}{2}x^2 + B_2. \tag{2.24}$$

Kui meie koordinaatide alguspunkt on tala keskel, siis kehtib vastavalt kinnitusviisi omadustele  $M(\pm \frac{l}{2}) = 0$  ning seega  $B_2 = \frac{pl^2}{8}$ . Nüüd

$$M = \frac{p}{2} \left( x^2 + \frac{l^2}{4} \right). \tag{2.25}$$

Momendid (2.22) ja (2.25) peavad olema võrdsed, sest nad kirjeldavad täpselt sama momenti. Teeme kontrolli: võtame tulemuse (2.22) ja rakendame seda punktis  $\frac{l}{2}$ . Selles punktis peab tulemus (2.22) olema võrdne tulemuse (2.25) väärtusega punktis 0. Tulemuseks saame

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{p}{2} \cdot \frac{l^2}{4} = M(0). \tag{2.26}$$



## Konsooltala

Kasutame tulemusest (2.18). Alustame valemist

$$Q = -p \cdot x + C_1. \quad (2.27)$$

Kinnitusviisi omadusest  $Q(l) = 0$  saame järeldada, et  $C_1 = pl$ . Seega

$$Q = -px + pl. \quad (2.28)$$

Kasutame tulemust (2.18), mis annab, et

$$M = -\frac{px^2}{2} + plx + C_2. \quad (2.29)$$

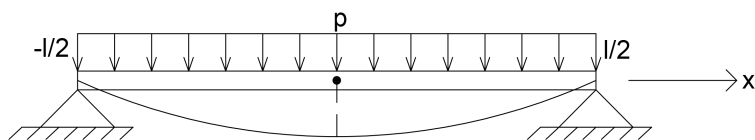
Kinnitusviisi omadusest  $M(l) = 0$  saame järeldada, et  $C_2 = -\frac{pl^2}{2}$ . Seega

$$M = -\frac{p}{2}(x-l)^2. \quad (2.30)$$

## 2.8 Läbipainded

Vaatleme eelnevalt mainitud kinnitusviiside korral konstantse ristlõikega talasid. Kasutame tulemusi (2.12), (2.17) ja (2.19), kus võtame tuletisi  $x$  järgi deformeerumata talas. Eeldame ka, et vaadeldav tala ei murdu, ehk  $w'(0) = 0$ .

### Vabalt toetatud tala



Joonis 13: Vabalt toetatud tala läbipaine

Olgu  $p$  talale mõjuv ühtlane koormus, mis mõjub tala igale punktile. Koordinaatide alguspunktiks võtame tala keskpunkti. Kinnitusviisile omaselt kehtivad ka omadused

$M(\pm \frac{l}{2}) = 0$  ja  $M'(0) = 0$ ,  $w(\pm \frac{l}{2}) = 0$ . Nagu eelmises alapeatükis

$$\begin{aligned} M'' &= p, \\ M' &= px + C_1. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Kuna  $M'(0) = 0$ , siis  $C_1 = 0$ . Integreerides veel üks kord tulemust (2.31) saame, et

$$M = p \frac{x^2}{2} + C_2. \tag{2.32}$$

Kinnitusviisi omadustest tuleneb, et  $M(\frac{l}{2}) = 0$  ning seega  $C_2 = p \frac{l^2}{8}$ .

Kuna

$$M = -EIw'', \tag{2.33}$$

siis

$$\begin{aligned} w'' &= -\frac{p}{2EI} \left( -x^2 + \frac{l^2}{4} \right), \\ w' &= -\frac{p}{2EI} \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{l^2}{4}x \right) + C_3. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Eelduse kohaselt  $w'(0) = 0$ , millest jäeldub, et  $C_3 = 0$ . Seega

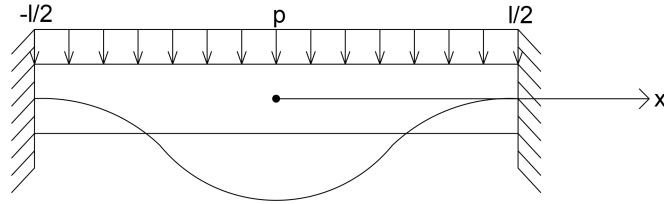
$$w = -\frac{p}{2EI} \left( -\frac{x^4}{12} + \frac{l^2}{8}x^2 \right) + C_4. \tag{2.35}$$

Teame, et  $w(\frac{l}{2}) = 0$ . Sellest jäeldub, et  $C_4 = \frac{-5pl^4}{384EI}$  ning

$$w = -\frac{p}{16EI} \left( -\frac{2x^4}{3} + l^2x^2 - \frac{5pl^4}{24EI} \right). \tag{2.36}$$

Vaatame maksimaalset läbipainet keskpunktis ehk punktis  $w(0) = w_0$ . Valemi (2.36) põhjal

$$w_0 = \frac{5pl^4}{32Ebh^3}. \tag{2.37}$$



Joonis 14: Jäigalt kinnitatud tala ühtlase jaotatud koormusega all

### Jäigalt kinnitatud tala

Analoogselt vabalt toetatud talaga võtame jäigalt kinnitatud tala keskpunkti koordinaatide alguspunktiks. Talale mõjub ühtlane koormus  $p$ . Kasutame võrrandit (2.19), mida integreerides jõuame tulemuseni

$$\begin{aligned} M'' &= -p, \\ M' &= -px + C_0, \\ M &= -\frac{p}{2}x^2 + C. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Kuna  $M'(0) = 0$  siis  $C_0 = 0$ . Edasi kasutame tulemust (2.12). Siit saame, et

$$\begin{aligned} w'' &= \frac{p}{2EI}x^2 - \frac{C}{EI}, \\ w' &= \frac{p}{2EI} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{C}{EI}x + C_1. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Kinnitusviisi omadustest järeldub, et  $w'(0) = 0$ , seega  $C_1 = 0$ . Kuna  $w'(\frac{l}{2}) = 0$ , siis

$$C = \frac{pl^2}{24}. \tag{2.40}$$

Integreerides saame leida läbipainde  $w$ :

$$w = \frac{p}{6EI} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{pl^2}{24EI} \cdot \frac{x^2}{2} + C_2. \tag{2.41}$$

Kasutades veel kord omadusi, mis tulenevad antud kinnitusviisist tala otspunktis  $w(\frac{l}{2}) = 0$ , saame konstandiks  $C_2$

$$C_2 = \frac{pl^4}{384EI}. \tag{2.42}$$

Seega saame läbipainde lõplikuks kujuks

$$w = \frac{p}{24EI} \left( x^4 - \frac{l^2 x^2}{2} + \frac{l^4}{16} \right). \quad (2.43)$$

Siit näeme, et läbipaine on jäigalt kinnitatud tala korral seda väiksem, mida suurem on materjali elastsusmoodul või tala paksus  $h$ , nagu võisime oletada. Vaatame ka läbipainet keskpunktis ehk  $w(0) = w_0$  korral. Seose (2.43) põhjal

$$w_0 = \frac{pl^4}{384EI}. \quad (2.44)$$

### Konsooltala

Tala on koormatud kontsentreeritud koormusega  $P$  vabal otsal, mis tähendab et  $Q(l) = P$ . Veel eeldame, et talale ei mõju ühtlane koormus  $p$ , mis tasakaaluvõrrandite kohaselt tähendab, et  $M'' = 0$ . Otsitavad on paindemoment  $M$  ja läbipaine  $w$  igas lõikes.

Kuna

$$M' = Q(l) = P, \quad (2.45)$$

siis

$$M = Px + C_1. \quad (2.46)$$

Vastavalt kinnitusviisi omadustele on paindemoment otspunktis võrdne nulliga, mis tähendab, et  $M(l) = 0$ , mille tõttu  $C_1 = -Pl$ . Seega

$$M = P(x - l). \quad (2.47)$$

Kasutades valemit (2.12) saame, et

$$M = -EIw''. \quad (2.48)$$

Integreerides (2.48) saame leida läbipainde

$$w' = -\frac{P}{EI} \cdot \frac{(x-l)^2}{2} + C_2. \quad (2.49)$$

Eelduse kohaselt  $w'(0) = 0$ , seetõttu  $C_2 = \frac{Pl^2}{2EI}$ . Asendades  $C_2$  valemisse (2.49) ning integreerides veel üks kord, saame tulemuseks

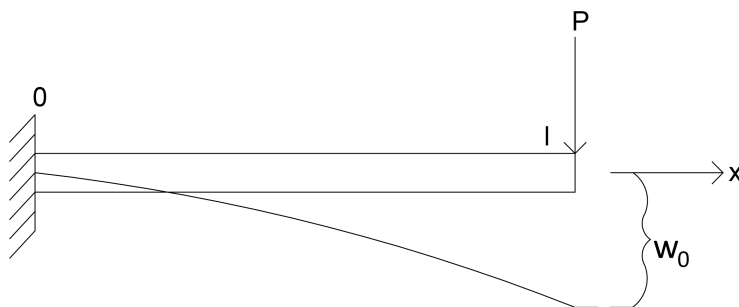
$$w = -\frac{P}{EI} \cdot \frac{(x-l)^3}{6} + \frac{Pl^2}{2EI}x + C_3. \quad (2.50)$$

Kinnitusviisi omadusest  $w(0) = 0$  saab järeldada, et  $C_3 = -\frac{Pl^3}{6EI}$  ning

$$w = -\frac{P}{6EI}((x-l)^3 - 3l^2x + l^3). \quad (2.51)$$

Läbipainde valem näitab, et mida tugevam on materjal ehk mida suurem on  $E$  väärtus, seda väiksem on läbipaine. Seda kinnitavad ka argipäevased kogemused. Kasutades kokkulepitud väärtust inertsimomendil (2.11), vaatleme, milline on läbipaine tala otspunktis ehk  $w_0 = w(l)$  (vt joonist 15). Seose (2.51) põhjal

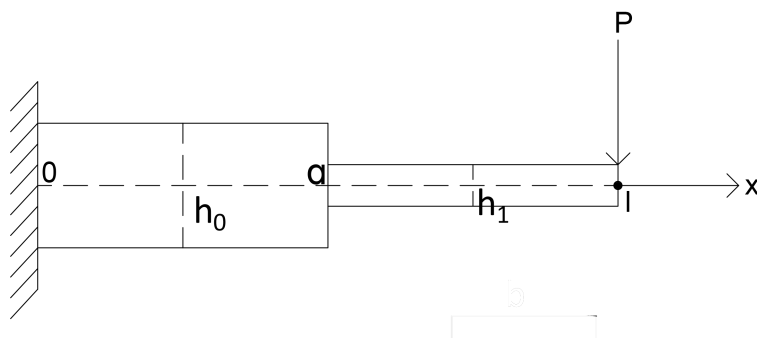
$$w_0 = \frac{4Pl^3}{Eb h^3}. \quad (2.52)$$



Joonis 15: Konsooltala läbipaine

## 2.9 Astmelise ristlõikega konssooltala

Vaatame konssooltala, mis ei ole konstantse ristlõikega iga  $x \in (0, l)$  korral (vt joonist 16).



Joonis 16: Astmelise ristlõikega konssooltala

Olgu üksikjõud  $P$  rakendatud tala vabale otsale. Otsitavateks on paindemoment  $M$  ja läbipaine  $w$  igas lõikes. Olgu talas punktis  $a$  aste. Seejuures on  $x < a$  korral kõrgus  $h = h_0$  ja kõrgus on  $h = h_1$ , kui  $x > a$ . Kõrgus muutub punktis  $a$  hüppeliselt. Selleks, et tala ei murduks, eeldatakse  $w'(0) = 0$ . Konssooltalade omadustest on teada, et  $M(l) = 0$  ja  $w(0) = 0$ . Kuna tala on muutuva kõrgusega, siis kõrgusest sõltuvad muutujad tuleb vastavalt kohandada. Inertsimoment (2.11) saab kaks väärtust:  $I = I_0$ , kui  $x < a$ , ning  $I = I_1$ , kui  $x > a$ . Seejuures

$$\begin{cases} I_0 = \frac{bh_0^3}{12}, \\ I_1 = \frac{bh_1^3}{12}. \end{cases} \quad (2.53)$$

Hooke'i seadusest järeldeb, et kõverus  $\varkappa$  sõltub tala ristlõike kõrgusest, kuna  $\varkappa = -\frac{M}{EI}$ . Tulemuse (2.47) põhjal  $M = P(x - l)$ . Seega tuleb kõverust vaadelda eraldi kahes piirkonnas. See tähendab, et läbipainde teine tuletis avaldub kujul

$$w'' = -(x - l) \cdot \begin{cases} \frac{P}{EI_0}, & \text{kui } x \in [0, a), \\ \frac{P}{EI_1}, & \text{kui } x \in (a, l]. \end{cases} \quad (2.54)$$

Integreerides valemit (2.54) parameetri  $x$  järgi saame, et

$$w' = \begin{cases} \frac{-P}{EI_0} \left( \frac{x^2}{2} - lx \right) + C_1, & \text{kui } x \in [0, a), \\ \frac{-P}{EI_1} \left( \frac{x^2}{2} - lx \right) + B_1, & \text{kui } x \in (a, l], \end{cases} \quad (2.55)$$

ja

$$w = \begin{cases} \frac{-P}{EI_0} \left( \frac{x^3}{6} - l \frac{x^2}{2} \right) + C_1 x + C_2, & \text{kui } x \in [0, a), \\ \frac{-P}{EI_1} \left( \frac{x^3}{6} - l \frac{x^2}{2} \right) + B_1 x + B_2, & \text{kui } x \in (a, l]. \end{cases} \quad (2.56)$$

Punktis  $a$  kehtivad järgmised pidevuse tingimused:  $w'(a-) = w'(a+)$  ja  $w(a-) = w(a+)$ .

Neid kasutades saame võrdused:

$$\begin{aligned} - \left( \frac{a^2}{2} - la \right) \frac{P}{EI_0} + C_1 &= - \left( \frac{a^2}{2} - la \right) \frac{P}{EI_1} + B_1, \\ - \left( \frac{a^3}{6} - \frac{la^2}{2} \right) \frac{P}{EI_0} + C_1 a + C_2 &= - \left( \frac{a^3}{6} - \frac{la^2}{2} \right) \frac{P}{EI_1} + B_1 a + B_2. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Tänu sellele, et  $w'(0) = 0$  ja  $w(0) = 0$  saame, et  $C_1 = 0$  ja  $C_2 = 0$ . Leiame integreerimiskonstandid piirkonnas  $x \in (a, l]$ . Võrduste (2.57) põhjal

$$\begin{aligned} B_1 &= \left( \frac{a^2}{2} - la \right) \left( \frac{P}{I_1} - \frac{P}{I_0} \right), \\ B_0 &= \left( -\frac{a^3}{3} + \frac{la^2}{2} \right) \left( \frac{P}{I_1} - \frac{P}{I_0} \right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Seega saame piirkonniti kaks erinevat läbipainet. Piirkonnas  $x \in [0, a]$  näeb läbipaine välja järgmiselt:

$$w(x) = -\frac{P}{I_0} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} \right). \quad (2.59)$$

Piirkonnas  $x \in [a, l]$  on läbipaine järgmise kujuga:

$$w(x) = -\frac{P}{I_1} \left( \frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} \right) + \left( \frac{P}{I_1} - \frac{P}{I_0} \right) \left[ \left( \frac{a^2}{2} - la \right) x - \frac{a^3}{3} + \frac{la^2}{2} \right]. \quad (2.60)$$

Kontrollime, kas mõlema piirkonna läbipaine annab punktis  $a$  sama tulemuse. Lähenedes

punktile  $a$  paremalt, saame tulemuseks

$$-\frac{P}{I_1} \left( \frac{a^3}{6} - \frac{la^2}{2} \right) + \left( \frac{P}{I_1} - \frac{P}{I_0} \right) \left( \frac{a^3}{6} - \frac{la^2}{2} \right) = -\frac{P}{I_0} \left( \frac{a^3}{6} - \frac{la^2}{2} \right), \quad (2.61)$$

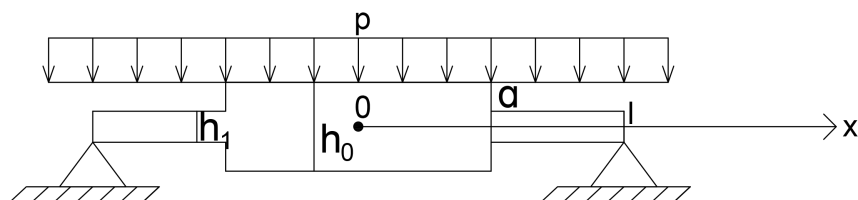
mis kattub tulemusega, kui läheneda punktile  $a$  vasakult. Uurime maksimaalset läbipainet ehk läbipainet punktis  $l$ , kus  $w_0 = w(l)$ . Valemi (2.60) põhjal

$$w_0 = P \left[ \frac{l^3}{3I_1} + a \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_0} \right) \left( al - l^2 - \frac{a^2}{3} \right) \right]. \quad (2.62)$$

Sarnaselt eelmiste uuritud maksimaalsete läbipainetega on ka siin näha, et kui rakendatud koormus  $P$  on võrdne nulliga, siis on ka läbipaine võrdne nulliga.

## 2.10 Tükiti konstantse paksusega tala; ühtlane ristkoormus

Uurime otstest vabalt toetatud tala, millele mõjub ühtlaselt jaotatud koormus  $p$ .



Joonis 17: Tükiti konstantse paksusega tala

Osutub, et nüüd on mõistlik võtta koordinaatide alguspunktiks tala keskpunkt. Võtame kõrgused  $h_0$  ja  $h_1$ , kus  $h_0 > h_1$ . Aste asub punktis  $x = a$ . Tala kogu pikkus on  $2l$  ja tala osa, kus kõrgus on  $h_0$ , on pikkuselt  $2a$ . Eeldame, et  $w'(0) = 0$  ning  $M'(0) = 0$ . Leiame momendid kasutades omadusi  $M'(0) = 0$  ja  $M(l) = 0$ .

Tasakaaluvõrrandit (2.19) integreerides jõuame tulemuseni

$$\begin{aligned} M' &= -px + C_1, \\ M &= -\frac{px^2}{2} + C_1x + C_2, \end{aligned} \quad (2.63)$$



kus  $C_1$ ,  $C_2$  on integreerimiskonstandid.

Kuna  $M'(0) = 0$ , siis  $C_1 = 0$ .

Kasutades omadust  $M(l) = 0$ , saame, et  $C_2 = \frac{pl^2}{2}$ , millest tulenevalt

$$M = -\frac{p}{2}(x^2 - l^2). \quad (2.64)$$

Leiame läbipainde analoogselt eelmises alapeatükis leitud läbipaindele, kasutades eelnevaid tulemusi (2.12) ja tähistust (2.53). Arvestades valemit (2.64) võime kirjutada, et

$$w'' = -\frac{p(x^2 - l^2)}{2EI}, \quad (2.65)$$

kus  $I = I_0$  kui  $x < a$  ja  $I = I_1$ , kui  $x > a$ .

Integreerides läbipainet (2.65)  $x$  järgi saame, et

$$w' = -\frac{p}{2EI} \left( \frac{x^3}{3} - l^2 x \right) + \begin{cases} A_0, & \text{kui } x \in [0, a), \\ B_0, & \text{kui } x \in (a, l]. \end{cases} \quad (2.66)$$

Analoogselt, kui  $x < a$ , siis  $I = I_0$  ja kui  $x > a$ , siis  $I = I_1$ .

Kasutades eeldust  $w'(0) = 0$  näeme, et  $A_0 = 0$ . Kuna punktis  $a$  peab läbipaine olema pidev, siis peab kehtima võrdus

$$-\frac{p}{2EI_0} \left( \frac{a^3}{3} - l^2 a \right) = -\frac{p}{2EI_1} \left( \frac{a^3}{3} - l^2 a \right) + B_0. \quad (2.67)$$

Seega

$$B_0 = \frac{p}{2E} \left( \frac{a^3}{3} - l^2 a \right) \left( -\frac{1}{I_0} + \frac{1}{I_1} \right). \quad (2.68)$$

Integreerime taas parameetri  $x$  järgi. See annab järgmise tulemuse:

$$w = -\frac{p}{4EI} \left( \frac{x^4}{6} - l^2 x^2 \right) + \begin{cases} A_1, & \text{kui } x \in [0, a), \\ B_0 x + B_1, & \text{kui } x \in (a, l], \end{cases} \quad (2.69)$$

kus  $I = I_0$ , kui  $x < a$ , ja  $I = I_1$ , kui  $x > a$ .

Saame kasutada omadust  $w(l) = 0$ , mille kohaselt

$$B_1 = -\frac{5pl^4}{24EI_1} + \frac{pl}{2E} \left( \frac{a^3}{3} - l^2a \right) \left( -\frac{1}{I_0} + \frac{1}{I_1} \right). \quad (2.70)$$

Kasutame asjaolu, et punktis  $a$  peavad mõlemas piirkonnas saadud läbipained olema võrdsed. Seega jõuame võrduseni

$$A_1 = \frac{p}{2E} \left[ \left( \frac{1}{I_0} - \frac{1}{I_1} \right) \left( \frac{a^4}{12} - \frac{l^2a^2}{2} + \frac{a^4}{3} - l^2a^2 - \frac{a^3l}{3} + l^3a \right) - \frac{5l^4}{12I_1} \right]. \quad (2.71)$$

Leiame maksimaalse läbipainde tala keskpunktis  $w_0 = w(0)$ . Näeme tulemusest (2.69), et  $w_0 = A_1$ .

## 2.11 Tala optimeerimine

Kui talal on mittekonstantne läbilõige, siis tekib küsimus, milline on materjali jaotus talas, mille korral tala saavutaks vähima läbipainde antud materjali hulga korral. Seda teemat uuritakse tala optimeerimise teoorias. Huvi pakuvad ka ülesanded, kus antakse ette materjali hulk, ning on vaja leida tala mõõtmed, millele vastaks minimaalne läbipaine (vt [3]). Alternatiivne juhtum on see, kui antakse ette minimaalne läbipaine, ning on vaja leida sellele vastav materjali jaotus ja kogus.

Teeme seda läbi näiteülesande, kui meil on esimest tüüpi ülesande püstitus. Uurime konsooltala, mille paksusel on üks aste. Olgu materjali kogus fikseeritud ja püüame leida minimaalse läbipainde. Astmelise ristlõikega tala korral on ruumala võimalik leida valemi

$$V = b[h_0a + h_1(l - a)] \quad (2.72)$$

abil. Fikseerime ruumala, võttes  $V = V_*$ . Läbipaindeks kasutame tulemust (2.62) ehk valemit

$$w_0 = \frac{P(l - a)^3}{3EI_1} + \frac{P}{EI_0} \left( l^2a - la^2 + \frac{a^3}{3} \right). \quad (2.73)$$

Leidmaks minimaalset läbipainet kasutame laiendatud Lagrange funktsiooni kordajatega

$$J_* = J + \lambda(V - V_*), \quad (2.74)$$

kus  $J = w_0$ . Nii saame, et

$$J_* = \frac{P(l-a)^3}{3EI_1} + \frac{P}{EI_0} \left( l^2 a - la^2 + \frac{a^3}{3} \right) + \lambda \left[ h_0 a + h_1(l-a) - \frac{V_*}{b} \right]. \quad (2.75)$$

Ülesande lihtsustamiseks fikseerime  $h_0$ . Seega otsitavateks on mõõdud  $h_1$  ja  $a$ . Ekstremumi tarvilike tingimuste kohaselt

$$\frac{\partial J_*}{\partial a} = -\frac{P(l-a)^2}{EI_1} + \frac{P}{EI_0}(l^2 - 2la + a^2) + \lambda[h_0 - h_1] = 0, \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial J_*}{\partial h_1} = \frac{P(l-a)^3}{3EI_1^2} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial h_1} + \lambda(l-a) = 0. \quad (2.77)$$

Siit saame arvutada, et

$$\lambda = \frac{P(l-a)^3}{3EI_1^2} \cdot \frac{3bh_1^2}{12}. \quad (2.78)$$

Arvestades valemit (2.78), saab võrrand (2.77) kuju

$$-\frac{P(l-a)^2}{EI_1} + \frac{P}{EI_0}(l-a)^2 + \frac{P(l-a)^3}{3EI_1^2} \cdot \frac{3bh_1^2}{12}[h_0 - h_1] = 0. \quad (2.79)$$

Jagades mõlemaid pooli läbi murruga  $\frac{P(l-a)^2}{E}$ , saame, et

$$-\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_0} + \frac{bh_1^2}{12I_1^2}(h_0 - h_1) = 0. \quad (2.80)$$

Korrutades läbi konstandiga  $I_1$  jõuame võrrandini

$$-1 + \frac{I_1}{I_0} + \frac{bh_1^2}{12I_1}(h_0 - h_1) = 0. \quad (2.81)$$

Tähistuse (2.53) kohaselt saame, et

$$-1 + \frac{bh_1^3}{bh_0^3} + \frac{h_0}{h_1} - 1 = 0. \quad (2.82)$$

Tähistades  $\gamma = \frac{h_1}{h_0}$  saame võrrandi

$$-1 + \gamma^3 + \frac{1}{\gamma} - 1 = 0. \quad (2.83)$$

Võrrandi (2.83) lahend annab meile kõrguste suhte. Suhte  $\gamma$  abil leiame punkti  $a$  asukoht, kasutades valemit (2.72):

$$a + \gamma(l - a) = \frac{V}{h_0 b}. \quad (2.84)$$

Siit saame, et

$$a = \frac{-\gamma l + \frac{V}{h_0 b}}{1 - \gamma}. \quad (2.85)$$

See tähendab, et meil on olemas eeskiri, kuidas leida minimaalsele läbipaindele vastava ühe astmega konsooltala mõõtmed fikseeritud materjali koguse korral.

# Kirjandus

- [1] R. Eek, L. Poverus, *Ehitusmehaanika*. Valgus, Tallinn, 1967.
- [2] H. Eschenauer, N. Olhoff, W. Schnell, *Applied Structural Mechanics*. Springer, 1997.
- [3] J. Lellep, *Süsteemide optimeerimine*. TÜ Kirjastus, Tartu, 2013.
- [4] Ü. Lepik, L. Roots, *Teoreetiline mehaanika*. Valgus, Tallinn, 1971.
- [5] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates*. CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [6] E. Ventsel, T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells Theory, Analysis and Application*. Marcel Dekker, New York, 2001.
- [7] J. Vinson, *Plate and Panel Structures of Isotropic, Composite and Piezoelectric Materials Including Sandwich Construction*. Springer, Dordrecht, 2005.
- [8] C.M. Wang, J. N. Reddy, K.H Lee, *Shear Deformable Beams and Plates*. Elsevier, Amsterdam, 2000.

## **Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Johannes Must (sünnikuupäev: 21.09.1992)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Pinged ja deformatsioonid plaatide teoorias", mille juhendaja on Jaan Lellep,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 4.06.2015